PENYELESAIAN PERSAMAAN *PENDULUM* NONLINEAR DENGAN MENGGUNAKAN METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN DAN METODE PERTUBASI HOMOTOPI

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains Pada
Jurusan Matematika

Oleh:

RATIH NOVA LIS NANI
10554001591

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2010

PENYELESAIAN PERSAMAAN *PENDULUM* NONLINEAR DENGAN MENGGUNAKAN METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN DAN METODE PERTUBASI HOMOTOPI

RATIH NOVA LIS NANI
NIM: 10554001591

Tanggal Sidang: 5 Mei 2010
Periode Wisuda: Juli 2010

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Skripsi ini membahas tentang penyelesaian persamaan *pendulum* nonlinear $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$ berdasarkan nilai awal $\theta(t)=c_1$ dan $\theta^{'}(t)=c_2$ dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian dan metode pertubasi homotopi dengan komponen nonlinear $N\theta=\sin\theta$. Tujuan dari kedua metode ini adalah untuk memperoleh penyelesaian eksak dari persamaan diferensial *pendulum* nonlinear tersebut. Berdasarkan perhitungan terlihat bahwa hasil yang diperoleh dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian adalah :

$$\theta(t)=c_1+tc_2+\frac{g}{2l}t^2\sin\theta_0+\frac{g}{4!l}t^4\sin\theta_0\cos\theta_0+\cdots$$

dan hasil yang diperoleh dengan menggunakan metode pertubasi homotopi adalah :

$$\theta(t)=\theta(0)+\frac{g}{l}\left(\theta_0-\frac{\theta_0^3}{3!}\right)+\frac{g}{l}\left(\theta_1-\frac{3\theta_0^2\theta_1}{3!}\right)+\cdots$$

Kata Kunci : Metode Dekomoposisi Adomian, Metode Pertubasi Homotopi, Persamaan Diferensial Nonlinear, *Pendulum.*

ON THE SOLUTION OF NONLINEAR PENDULUM EQUATION BY USING ADOMIAN DECOMPOSITION METHOD AND HOMOTOPY PERTURBATION METHOD

RATIH NOVA LIS NANI
NIM: 10554001591

Date of Final Exam: May 5th, 2010
Graduation Ceremony Priod: July, 2010

Mathematic Department
Faculty of Sciences and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Soebrantas Street No.155 Pekanbaru

ABSTRACT

This paper discusses the solving of nonlinear pendulum differential equation $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$ *based on the initial value problem* $\theta(0)=c_1$ *and* $\theta^{'}(0)=c_2$ *by using Adomian decomposition method and homotopi perturbation method with the nonlinear term* $N\theta=\sin\theta$. *Aim of the both of this method is to obtain exact solution of the nonlinear pendulum differential equation. Based on the calculation that the result obtained by using Adomian decomposition method is :*

$$\theta(t)=c_1+tc_2+\frac{g}{2l}t^2\sin\theta_0+\frac{g}{4!l}t^4\sin\theta_0\cos\theta_0+\cdots$$

and the result obtained by using homotopy perturbation method is :

$$\theta(t)=\theta(0)+\frac{g}{l}\left(\theta_0-\frac{\theta_0^3}{3!}\right)+\frac{g}{l}\left(\theta_1-\frac{3\theta_0^2\theta_1}{3!}\right)+\cdots$$

Keyword: *Adomian Decomposition Method, Homotopy Perturbation Method, Nonlinear Differential Equation, Pendulum.*

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan salah satu ilmu pengetahuan yang banyak memberikan landasan teori bagi perkembangan teknologi. Matematika senantiasa dikaji dan dikembangkan agar dapat dimanfaatkan di dalam aspek penerapannya. Masalah – masalah dalam dunia nyata dapat lebih mudah dimengerti dengan menggunakan pendekatan matematika.

Cabang dari matematika modern yang mempunyai cakupan wilayah penelitian teoritik dan aplikasi luas adalah persamaan diferensial. Dalam berbagai masalah fisik dan geometri yang melibatkan dua fungsi atau lebih peubah bebas sangat berkaitan dengan persamaan diferensial. Untuk masalah fisik yang paling sederhana dapat di modelkan dengan persamaan diferensial biasa, sedangkan masalah fisik yang lain seperti mekanika fluida, mekanika padat, teori elektromagnetik, teori potensial, difusi dan sebagainya merupakan masalah – masalah fisik yang harus dimodelkan dengan persamaan diferensial parsial.

Umumnya persamaan diferensial orde satu yang linear dapat diselesaikan secara analitik sehingga menghasilkan penyelesaian eksak, sedangkan persamaan nonlinear sangat sulit diselesaikan secara analitik walaupun sebagian kecil dapat diselesaikan dengan metode variabel terpisah.

Umumnya penyelesaian persamaan diferensial nonlinear dilakukan dengan teknik pelinearan, pertubasi. Hal ini akan berdampak pada munculnya galat. Skripsi ini, akan diusulkan dua teknik metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinear, tanpa melakukan linearisasi persamaan, yaitu metode dekomposisi Adomian dan metode pertubasi homotopi.

Metode dekomposisi diperkenalkan pertama kali oleh Adomian pada tahun 1994 yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan – persamaan fungsional linear dan nonlinear, seperti persamaan diferensial aljabar, persamaan diferensial biasa, persamaan diferensial parsial, persamaan diferensial integral.

Metode pertubasi homotopi dikenal pada tahun 2004 oleh J. He yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan-persamaan linier dan nonlinier. Metode pertubasi homotopi ini digunakan untuk mengecilkan atau menurunkan suatu masalah yang sulit menjadi masalah yang mudah untuk diselesaikan.

Salah satu bentuk persamaan diferensial nonlinear orde dua adalah persamaan *pendulum* nonlinear $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$. Persamaan *pendulum* nonlinear ini sangat sulit dan tidak mungkin diselesaikan secara analitis.

Berdasarkan hal tersebut di atas penulis tertarik untuk mengkaji tentang penggunaan metode dekomposisi Adomian dan metode pertubasi homotopi untuk menentukan solusi eksplisit persamaan diferensial nonlinear orde dua, sehingga dalam penulisan skripsi ini penulis mengambil judul **”Penyelesaian Persamaan *Pendulum* Nonlinear dengan Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian dan Metode Pertubasi Homotopi”.**

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada skripsi ini adalah bagaimana menentukan penyelesaian persamaan diferensial *pendulum* $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$, berdasarkan nilai awal $\theta(0)=c_1$ dan $\theta^{'}(0)=c_2$ dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian dan metode pertubasi homotopi.

1.3 Batasan Masalah

Skripsi ini penulis hanya membatasi pada persamaan *pendulum* nonlinear orde dua dengan persamaan umumnya $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$ dengan variabel bebas *t* berdasarkan nilai awal $\theta(0)=c_1$ dan $\theta^{'}(0)=c_2$.

1.4 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah menentukan solusi persamaan *pendulum* nonlinear dengan metode dekomposisi Adomian dan metode pertubasi homotopi.

1.5 Manfaat

Manfaat dari penelitian ini adalah :

1. Dapat menentukan nilai simpangan sudut *pendulum*.
2. Dapat menentukan nilai perioda atau frekuensi dari sistem gerak nonlinear.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan skripsi ini terdiri dari beberapa bab, yaitu :

BAB I Pendahuluan

Bab ini berisi latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat penelitian, sistematika penulisan.

BAB II Landasan Teori

Bab ini berisikan landasan teori seperti : persamaan diferensial, persamaan diferensial nonlinear orde dua, persamaan *pendulum* nonlinier, metode dekomposisi adomian, metode pertubasi homotopi, dan *Maple*.

BAB III Metodologi

Bab ini berisikan studi literatur yang digunakan penulis dan berisikan langkah – langkah yang digunakan untuk mencapai tujuan dari skripsi ini.

BAB IV Pembahasan

Bab ini berisikan tentang perbandingan metode dekomposisi Adomian dan metode pertubasi homotopi yang digunakan untuk membahas persamaan diferensial *pendulum* nonlinier.

BAB V Penutup

Bab ini berisikan kesimpulan dari seluruh uraian dan saran – saran untuk pembaca.

BAB II
LANDASAN TEORI

Bab ini membahas tentang persamaan diferensial, persamaan diferensial nonlinear orde dua, persamaan *pendulum*, metode dekomposisi Adomian, dan metode pertubasi homotopi serta *Maple.*

2.1 Persamaan diferensial

Persamaan diferensial diperoleh berdasarkan pemodelan matematika dari permasalahan yang ada dalam kehidupan sehari – hari. Sebagai contoh penerapan matematika pada ilmu fisika. Misalnya pemodelan matematis yang berasal dari hukum Newton II yang menyatakan, bahwa massa kali percepatan suatu benda sama dengan gaya luar yang bekerja pada benda itu. Suatu benda bermassa m bergerak sepanjang sumbu y pada sistem koordinat kartesius. Hukum Newton II dapat ditulis sebagai $m\frac{d^2y}{dt^2}=F$, dengan F melambangkan gaya luar yang bekerja pada benda itu. Persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial karena memuat turunan dari fungsi yang tidak diketahui $y(t)$ dengan y sebagai variabel terikat yang tergantung pada variabel bebas t. Jadi persamaan diferensial adalah persamaan yang mengandung fungsi dan bentuk – bentuk turunannya.

Jika persamaan diferensial mempunyai satu variabel tak bebas dari persamaan tersebut disebut persamaan diferensial biasa, dan jika persamaan diferensial mempunyai lebih dari satu variabel bebas dan tak bebas dari persamaan tersebut disebut persamaan diferensial parsial.

Orde dari persamaan diferensial adalah orde dari turunan tertinggi dalam persamaan. Bentuk umum dari persamaan diferensial orde satu adalah

$$F(t,\theta,\theta')=0$$

persamaan diferensial orde dua

$$F(t,\theta,\theta',\theta'')=0$$

dan persamaan orde n

$$F(t,\theta,\theta',\ldots,\theta^{n}) = 0$$

dengan *F* adalah fungsi riil dari $t,\theta,\theta',\ldots,\theta^{n}$.

Persamaan diferensial orde *n* dikatakan linear jika persamaannya dapat ditulis dalam bentuk

$$a_n(t)\theta^{n} + a_{n-1}(t)\theta^{n-1} + \ldots + a_1(t)\theta' + a_0(t)\theta = f(t) \qquad (2.1)$$

$a_n(t) \neq 0$. $a_0(t), a_1(t), \ldots a_{n-1}(t)$ adalah fungsi yang tidak diketahui dari *t* yang disebut koefisien, dan koefisien dari suatu persamaan diferensial dapat berbentuk konstanta atau variabel.

Persamaan (2.1) dikatakan homogen jika $f(t) = 0$ dan dikatakan nonhomogen jika $f(t) \neq 0$. Persamaan yang tidak dapat dinyatakan seperti persamaan (2.1) disebut persamaan nonlinear.

Solusi dari persamaan diferensial biasa adalah fungsi yang jika disubtitusikan pada persamaan diferensial tersebut akan memberikan suatu identitas yang biasa disimbolkan dengan $\theta = \theta(t)$.

2.2 Persamaan Diferensial Nonlinear Orde Dua

Persamaan diferensial orde dua sering timbul dalam permasalahan fisika. Persamaan diferensial orde dua yang akan dibahas adalah persamaan diferensial nonlinear. Persamaan diferensial nonlinear adalah suatu persamaan yang mengandung variabel tak bebas atau derivatifnya dalam bentuk nonlinear, atau terdapat perkalian antara variabel tak bebas dan derivatifnya.

Secara umum persamaan diferensial orde dua nonlinear sangat sulit untuk mencari solusinya. Persamaan tersebut meliputi turunan kedua, hal tersebut akan mungkin menyelesaikannya dengan melinearkan persamaan tersebut atau dengan dua kali anti diferensial, dengan mereduksi persamaan orde dua menjadi dua persamaan orde satu. Bentuk persamaan diferensial orde dua

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = f(t,\theta,\frac{d\theta}{dt})$$

menjadi persamaan diferensial orde satu

$$\frac{d\theta}{dt} = v, \frac{dv}{d\theta} = f(\theta, v) \tag{2.2}$$

menggunakan aturan rantai didapat

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dv}{d\theta}v,$$

Sehingga persamaan (2.2) dapat ditulis

$$v\frac{dv}{d\theta} = f(\theta, v)$$

2.3 Persamaan Diferensial *Pendulum*

Gerak dari ayunan *pendulum* memiliki suatu daya tarik hipnotik yang sangat kuat terhadapnya. Galileo, Newton, Bernoulli dan ilmuwan Belanda Christian Huygens (1629-1695) semuanya mengamati gerakan *pendulum*, memikirkan secara mendalam tentang apa yang mereka lihat dan menciptakan model matematika untuk gerakannya.

Pendulum adalah salah satu permasalahan fisika yang merupakan suatu benda yang tergantung pada seutas tali yang tidak molor, sehingga dapat bergerak dengan bebas dalam bidang vertikal.

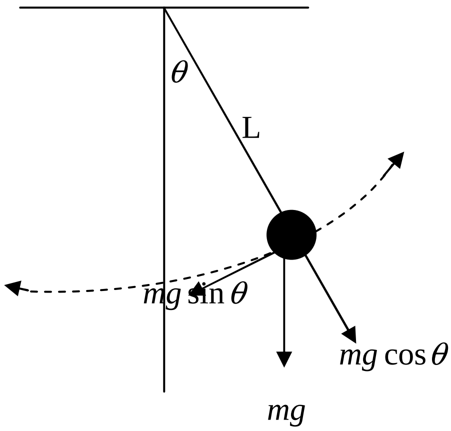
Beberapa asumsi dasar tentang *pendulum* dalam hukum fisika agar didapat persamaan *pendulum* yaitu :

1. Gaya yang bekerja pada *pendulum* hanya gravitasi.
2. Tali tidak molor, dengan panjang konstan dan tanpa massa.
3. *Pendulum* berayun tanpa gesekan dan medium terpusat pada satu titik.
4. Massa *pendulum* adalah massa suatu partikel.

Untuk menerapkan hukum fisika mempunyai besaran – besaran yang mempengaruhi kerja *pendulum* yaitu :

1. Massa *pendulum* *m*.
2. Panjang Tali *L*.
3. Percepatan gravitasi *g*.
4. Waktu *t*.
5. Besaran simpangan *pendulum* θ.

Gambar 2.1 memperlihatkan sebuah *pendulum* yang panjangnya *L* dengan massa partikel *m*, membentuk sudut θ dengan bidang vertikal. Gaya yang bekerja pada *m* adalah *mg* yaitu gaya gravitasi.



Gambar 2.1 Gaya gravitasi *pendulum* sederhana

Jika *pendulum* dilepas dari keadaan diam, maka *pendulum* akan berayun dan bergerak membentuk busur lingkaran. Berdasarkan hukum Newton II ; gaya – gaya yang bekerja pada *pendulum*,

$$F = -mg\sin\theta$$

oleh karena $F = ma$, maka

$$ma = -mg\sin\theta$$

$$a = -g\sin\theta$$

dengan

$$s = l\theta$$

$$v = \frac{ds}{dt} = l\frac{d\theta}{dt}$$

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

sehingga

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \tag{2.3}$$

oleh karena itu, persamaan (2.3) dapat dinyatakan sebagai persamaan *pendulum* yaitu

$$\theta'' + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \tag{2.4}$$

berdasarkan syarat awal

$$\theta(t=0) = \theta_0 \text{ dan } \theta'(t=0) = 0$$

dengan

θ adalah simpangan,

g adalah percepatan gravitasi,

L adalah panjang tali,

t adalah waktu.

2.4 Metode Dekomposisi Adomian

Metode dekomposisi Adomian adalah salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinear berdasarkan nilai awalnya.

$$L\theta + R\theta + N\theta = \phi(t)$$

$$L\theta = \phi(t) - R\theta - N\theta$$

$$L_{tt}^{-1}L\theta = L_{tt}^{-1}\phi(t) - L_{tt}^{-1}R\theta - L_{tt}^{-1}N\theta \tag{2.5}$$

dimana $L = \frac{d^n}{dt^n}$ adalah operator diferensial. Diasumsikan bahwa *invers* operator L_{tt}^{-1} ada, dan merupakan integral sebanyak orde yang ada pada *L* terhadap *t* dari 0 sampai *t*. Ambil *n=2*, maka $L = \frac{d^2}{dt^2}$ sehingga :

$$L_{tt}^{-1}(\cdot) = \int_0^t\int_0^t (\cdot)\,dtdt$$

dari persamaan (2.5) diperoleh :

$$\theta(t) = \theta(0) + t\theta'(0) + L_{tt}^{-1}\phi(t) - L_{tt}^{-1}R\theta - L_{tt}^{-1}N\theta \tag{2.6}$$

diasumsikan bahwa $N\theta$ adalah deret polinomial Adomian A_n, ditulis

$$N\theta = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

Misalkan $N\theta = f(\theta)$,

maka

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_n)$$

oleh karena deret polinomial Adomian $A_i (i = 0,1,\cdots,n)$ bergantung kepada $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$ dan merupakan deret konvergen, sehingga

$$A_0 = f(\theta_0)$$

maka

$$A_1 = \theta_1 \left(\frac{d}{d\theta_0} f(\theta_0) \right)$$

$$A_2 = \theta_2 \left(\frac{d}{d\theta_0} f(\theta_0) \right) + \left(\frac{\theta_1^2}{2!} \right) \left(\frac{d^2}{d\theta_0^2} f(\theta_0) \right)$$

$$A_3 = \theta_3 \left(\frac{d}{d\theta_0} f(\theta_0) \right) + \theta_1 \theta_2 \left(\frac{d^2}{d\theta_0^2} f(\theta_0) \right) + \left(\frac{\theta_1^3}{3!} \right) \left(\frac{d^3}{d\theta_0^3} f(\theta_0) \right)$$

$$A_4 = \theta_4 \left(\frac{d}{d\theta_0} f(\theta_0) \right) + \left(\frac{\theta_2^2}{2!} + \theta_1 \theta_3 \right) \left(\frac{d^2}{d\theta_0^2} f(\theta_0) \right) + \left(\frac{\theta_1^2 \theta_2}{2!} \right)$$

$$\left(\frac{d^3}{d\theta_0^3} f(\theta_0) \right) + \left(\frac{\theta_1^4}{4!} \right) \left(\frac{d^4}{d\theta_0^4} f(\theta_0) \right)$$

$$\vdots$$

sehingga $f(\theta)$ dapat disusun kembali sebagai deret,

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{(\theta - \theta_0)^n}{n!} \right) \left(\frac{d^n}{d\theta_0^n} f(\theta_0) \right) \right]$$

Contoh 2.1

Misalkan $N\theta = \theta^3$, carilah nilai A_0 sampai A_5

Penyelesaian :

$$A_0 = \theta_0^3$$

$$A_1 = 3\theta_0^2\theta_1$$

$$A_2 = 3\theta_0^2\theta_2 + 3\theta_0\theta_1^2$$

$$A_3 = \theta_1^3 + 3\theta_0^2\theta_3 + 6\theta_0\theta_1\theta_2$$

$$A_4 = 3\theta_0^2\theta_4 + 3\theta_1^2\theta_2 + 3\theta_2^2\theta_0 + 6\theta_0\theta_1\theta_3$$

$$A_5 = 3\theta_0^2\theta_5 + 3\theta_1^2\theta_3 + 3\theta_2^2\theta_1 + 6\theta_0\theta_1\theta_4 + 6\theta_0\theta_2\theta_3 \qquad \blacksquare$$

Contoh 2.2

Misalkan $N\theta = \sin\theta$, carilah nilai A_0 sampai A_3

Penyelesaian :

$$A_0 = \sin\theta_0$$

$$A_1 = \theta_1 \cos\theta_0$$

$$A_2 = -(\theta_1^2 / 2)\sin\theta_0 + \theta_2 \cos\theta_0$$

$$A_3 = -(\theta_1^3 / 6)\cos\theta_0 - \theta_1\theta_2 \sin\theta_0 + \theta_3 \cos\theta_0 \qquad \blacksquare$$

Pembahasan sebelumnya, polinomial Adomian A_n digunakan untuk menghampiri bentuk nonlinier tunggal, pada kasus bentuk nonlinier yang melibatkan derivatifnya,

$$f(\theta) = g(\theta)h(\theta)$$

maka polinomial Adomian A_n, adalah

$$A_n = B_0C_n + B_1C_{n-1} + B_2C_{n-2} + \cdots + B_{n-1}C_1 + B_nC_0$$

Bentuk $B_i (i = 0,1,2,\cdots,n)$ diperoleh dari pengertian polinomial Adomian sebelumnya untuk $g(\theta)$, yaitu

$$B_0 = g(\theta_0)$$

$$B_1 = \theta_1\left(\frac{d}{d\theta_0} g(\theta_0)\right)$$

$$B_2 = \theta_2\left(\frac{d}{d\theta_0} g(\theta_0)\right) + \left(\frac{\theta_1^{\ 2}}{2!}\right)\left(\frac{d^2}{d\theta_0^2} g(\theta_0)\right)$$

$$B_3 = \theta_3\left(\frac{d}{d\theta_0} f(\theta_0)\right) + \theta_1\theta_2\left(\frac{d^2}{d\theta_0^2} f(\theta_0)\right) + \left(\frac{\theta_1^3}{3!}\right)\left(\frac{d^3}{d\theta_0^3} f(\theta_0)\right)$$

$$B_4 = \theta_4\left(\frac{d}{d\theta_0} f(\theta_0)\right) + \left(\frac{\theta_2^2}{2!} + \theta_1\theta_3\right)\left(\frac{d^2}{d\theta_0^2} f(\theta_0)\right) + \left(\frac{\theta_1^2\theta_2}{2!}\right)$$

$$\left(\frac{d^3}{d\theta_0^3} f(\theta_0)\right) + \left(\frac{\theta_1^4}{4!}\right)\left(\frac{d^4}{d\theta_0^4} f(\theta_0)\right)$$

$$\vdots$$

dan $C_i\,(i = 0,1,2,\cdots,n)$ diperoleh dengan cara yang sama, yaitu

$$C_0 = h(\theta_0)$$

$$C_1 = \theta_1\left(\frac{d}{d\theta_0} f(\theta_0)\right)$$

$$C_2 = \theta_2\left(\frac{d}{d\theta_0} f(\theta_0)\right) + \left(\frac{\theta_1^{\ 2}}{2!}\right)\left(\frac{d^2}{d\theta_0^2} f(\theta_0)\right)$$

$$C_3 = \theta_3\left(\frac{d}{d\theta_0} f(\theta_0)\right) + \theta_1\theta_2\left(\frac{d^2}{d\theta_0^2} f(\theta_0)\right) + \left(\frac{\theta_1^3}{3!}\right)\left(\frac{d^3}{d\theta_0^3} f(\theta_0)\right)$$

$$C_4 = \theta_4\left(\frac{d}{d\theta_0} f(\theta_0)\right) + \left(\frac{\theta_2^2}{2!} + \theta_1\theta_3\right)\left(\frac{d^2}{d\theta_0^2} f(\theta_0)\right) + \left(\frac{\theta_1^2\theta_2}{2!}\right)$$

$$\left(\frac{d^3}{d\theta_0^3} f(\theta_0)\right) + \left(\frac{\theta_1^4}{4!}\right)\left(\frac{d^4}{d\theta_0^4} f(\theta_0)\right)$$

$$\vdots$$

Untuk itu, jika diuraikan maka bentuk $A_i\,(i = 0,1,\cdots,n)$,diperoleh

$$
\begin{aligned}
A_0 &= B_0C_0 \\
A_1 &= B_0C_1 + B_1C_0 \\
A_2 &= B_0C_2 + B_1C_1 + B_2C_0 \\
A_3 &= B_0C_3 + B_1C_2 + B_2C_1 + B_3C_0 \\
A_4 &= B_0C_4 + B_1C_3 + B_2C_2 + B_3C_1 + B_4C_0 \\
&\vdots \\
A_n &= B_0C_n + B_1C_{n-1} + B_2C_{n-2} + \cdots + B_{n-1}C_1 + B_nC_0 \\
&= \sum_{i=0}^{n} B_iC_{n-1}
\end{aligned}
$$

Menurut (G. Adomian) metode dekomposisi memuat komposisi fungsi-fungsi tak diketahui yaitu fungsi $\theta(t)$. Fungsi $\theta(t)$ adalah jumlah komponen – komponen yang didefinisikan sebagai deret dekomposisi yaitu deret dari $\theta(t), \theta_1(t), \theta_2(t), \cdots,$ yang ditulis

$$
\begin{aligned}
\theta(t) &= \theta_0(t) + \theta_1(t) + \theta_2(t) + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n(t) \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

selanjutnya, subtitusi persamaan (2.7) ke persamaan (2.6) dapat diurai menjadi :

$$\theta(t) = \theta_0(t) - L_{tt}^{-1} R \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n(t) - L_{tt}^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

dengan

$$
\begin{aligned}
\theta_1(t) &= -L_{tt}^{-1} R\theta_0 - L_{tt}^{-1} A_0 \\
\theta_2(t) &= -L_{tt}^{-1} R\theta_1 - L_{tt}^{-1} A_1 \\
\theta_3(t) &= -L_{tt}^{-1} R\theta_2 - L_{tt}^{-1} A_2 \\
&\vdots \\
\theta_{n+1}(t) &= -L_{tt}^{-1} R\theta_n - L_{tt}^{-1} A_n
\end{aligned}
$$

Selanjutnya setelah nilai suku – suku $\theta_0(t), \theta_1(t), \theta_2(t), \cdots, \theta_{n+1}(t)$ telah diketahui, maka penyelesaian dapat diperoleh

$$\theta(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \theta_k$$

2.5 Metode Pertubasi Homotopi

Metode pertubasi homotopi adalah salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier dan metode pertubasi homotopi ini mempunyai tujuan utama untuk mengecilkan atau menyelesaikan suatu masalah yang sulit ke suatu masalah yang mudah untuk diselesaikan.

Diberikan persamaan diferensial nonlinear :

$$A(v) - f(r) = 0 \quad , r \in \Omega \tag{2.8}$$

dengan kondisi batas:

$$B\left(v, \frac{dv}{dt}\right) = 0 \qquad , r \in \Gamma$$

dengan A adalah operator diferensial umum, B adalah batas operator terbatas, $f(r)$ adalah analisis fungsi yang diketahui dan fungsi Γ adalah batas dari domain Ω.

Misalkan A terdiri dari dua bagian yaitu L dan N, dengan L adalah linier dan N adalah nonlinier, sehingga $A(v) = L(v) + N(v)$. Oleh karena itu, persamaan (2.8) dapat ditulis kembali sebagai berikut

$$L(v) + N(v) - f(r) = 0 \quad , r \in \Omega \tag{2.9}$$

jika diasumsikan invers operator L_{tt}^{-1} ada, dan merupakan intergral sebanyak orde yang ada pada L terhadap t dari 0 sampai t. Ambil $n = 2$, maka $L\dfrac{d^2}{dt^2}$ sehingga :

$$L_{tt}^{-1}(\cdot) = \int_0^t \int_0^t (\cdot)\, dt dt$$

selanjutnya akan dibangun sebuah homotopi $\theta(r, p) : \Omega \times [0,1] \to \Re$ yang memenuhi :

$$H(v, p) = (1-p)\left[L(v) - L(\theta_0)\right] + p\left[A(v) - f(r)\right] = 0\,,\ p \in [0,1]. \tag{2.10}$$

atau

$$H(v,p)=L(v)-L(\theta_0)+pL(\theta_0)+p[N(v)-f(r)]=0 \tag{2.11}$$

jika $p=0$ dan $p=1$ maka persamaan (2.11) menjadi

$$H(v,0)=L(v)-L(\theta_0)=0 \tag{2.12}$$

$$H(v,1)=A(v)-f(r)=0 \tag{2.13}$$

dengan persamaan (2.12) dan persamaan (2.13) disebut homotopi, untuk $p=0$ persamaan (2.12) adalah persamaan linier, dan untuk $p=1$, persamaan (2.13) adalah persamaan nonlinier. Oleh karena $p\in[0,1]$ merupakan parameter kecil yang digunakan.

Oleh karena bentuk homotopi digunakan pada persamaan nonlinear,maka solusi dari persamaan (2.11)

$$v=v_0(t)+pv_1(t)+p^2v_2(t)+\cdots \tag{2.14}$$

parameter kecil $p\to 1$, sehingga

$$\theta=\lim_{p\to 1}v=v_0+v_1+v_2+\cdots \tag{2.15}$$

Menurut HPM, mengubah atau membangun sebuah homotopi sebagai berikut :

$$H(v,p)=L(v)-L(\theta_0)+p[L(\theta_0)+N(v)-f(r)]=0 \tag{2.16}$$

dengan $p\in[0,1]$ yang merupakan parameter penempel dan θ_0 adalah nilai awal yang secara umum memenuhi syarat batas yang diberikan

$$L(v_0+v_1p+v_2p^2+\cdots)-L(\theta_0)+p[L(\theta_0)+N(v_0+v_1p+v_2p^2+\cdots)$$
$$-f(r)]=0 \tag{2.17}$$

untuk orde 0, $p=p^2=p^3=\cdots=0$, sehingga persamaan (2.17) menjadi

$$L(v_0)=L(\theta_0)$$

$$v_0(t)=\theta(0)=\theta_0(t)=c$$

untuk orde 1, $p\neq 0$, $p^2=p^3=\cdots=0$, sehingga persamaan (2.17) menjadi

$$L(v_1)+L(\theta_0)+N(v_0)-f(r)=0,\quad v_1(0)=0$$

$$v_1(t)=-L_{tt}^{-1}(\theta_0)-L_{tt}^{-1}N(v_0)+f(r)$$

untuk orde 2, $p^2\neq 0$, $p=p^3=\cdots=0$, sehingga persamaan (2.17) menjadi

$$L(v_2)+N(v_1)=0, \quad v_2(0)=0$$

$$v_2(t)=-L_{tt}^{-1}N(v_1)$$

untuk orde 3, $p^3 \neq 0$, $p = p^2 = \cdots = 0$, sehingga persamaan (2.17) menjadi

$$L(v_3)+N(v_2)=0, \quad v_3(0)=0$$

$$v_3(t)=-L_{tt}^{-1}N(v_2)$$

Selanjutnya setelah nilai suku – suku diketahui, maka penyelesaian dapat diperoleh dengan menggunakan hampiran

$$\theta(t)=\lim_{p\to 1} v=\sum_{k=0}^{n-1} v_k(t)$$

2.6 *Maple*

Maple sering digunakan untuk keperluan penyelesaian permasalahan persamaan diferensial dan visualisasinya, karena selain mudah digunakan *Maple* mempunyai kemampuan menyederhanakan persamaan diferensial sehingga solusi persamaan diferensial dapat dipahami dengan baik. Keunggulan dari *Maple* untuk aplikasi persamaan diferensial adalah kemampuan melakukan animasi (gerakan) grafik dari suatu fenomena gerakan yang dimodelkan ke dalam persamaan diferensial yang mempunyai nilai awal dan syarat batas.

Statement yang sering digunakan untuk keperluan menyelesaikan permasalahan persamaan diferensial antara lain : diferensial digunakan untuk mendiferensialkan (menurunkan) suatu fungsi, *dsolve* digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial, evalf memberikan nilai numeric dari suatu persamaan, dan *simplify* digunakan untuk menyederhanakan suatu persamaan. Namun tentu saja pernyataan – pernyataan awal seperti *restart* dan *deklarasi variable* atau konstanta yang diperlukan tidak boleh diabaikan. Sedangkan untuk membuat grafik digunakan perintah *plot, plot 2d, plot 3d*, tergantung dimensi dari pernyataan yang dimiliki, untuk membuat animasi digunakan perintah *animate 3d*. Setiap perintah pada *Maple* harus dituliskan setelah tanda *Maple prompt* yang diakhiri dengan titik dua (bila hasilnya tidak akan ditampilkan) atau titik koma (bila hasilnya akan ditampilkan).

Maple merupakan salah satu perangkat lunak (*software*) yang dikembangkan oleh *waterloo.inc.* untuk keperluan *computer algebraic system* (CAS). Menu – menu yang terdapat pada *Maple* terdiri dari menu : file, edit, view, insert, format, spreadsheet, option, window, dan help merupakan menu standar yang dikembangkan untuk program aplikasi pada sistem windows.

Bahasa yang digunakan pada *Maple* merupakan bahasa pemrograman yang sekaligus bahasa aplikasi, sebab pernyataan atau *statement* yang merupakan masukan (*input*) pada *Maple* merupakan deklarasi pada bahasa program dan perintah (*command*) yang sering digunakan pada bahasa aplikasi.

Maple bisa dipakai untuk menganalisis dan menginterpretasikan solusi yang diperoleh ke masalah nyata yang telah dimodelkan. *Maple* sangat dibutuhkan untuk membantu mempermudah menyelesaikan persamaan diferensial.

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Metode yang digunakan pada skripsi ini adalah studi pustaka, dengan langkah – langkah sebagai berikut :

a) Berdasarkan metode dekomposisi Adomian

1. Menentukan persamaan diferensial *pendulum* nonlinear $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$, berdasarkan nilai awal $\theta(0)=c_1$ dan $\theta^{'}(0)=c_2$.
2. Menentukan bentuk operator diferensial $L\theta=-\frac{g}{l}\sin\theta$.
3. Menentukan bentuk *invers* operator $L_{tt}^{-1}\theta=-L_{tt}^{-1}\frac{g}{l}\sin\theta$.
4. Menentukan nilai polinomial nonlinear Adomian untuk $N(\theta)=\sin\theta$, sehingga $N(\theta)=\sum_{i=1}^{\infty}A_i$.
5. Menentukan nilai $\theta_0,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{n+1}$.
6. Menentukan $\theta(t)=\theta_0+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{n+1}$.

b) Berdasarkan metode pertubasi homotopi

1. Menentukan persamaan diferensial *pendulum* nonlinear $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$, berdasarkan nilai awal $\theta(0)=c_1$ dan $\theta^{'}(0)=c_2$.
2. Mengekspansi nilai $\sin\theta\approx\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}$.
3. Mensubtitusikan persamaan (2.14) ke persamaan (4.14).
4. Menyusunkannya berdasarkan orde pertubasi *p*.
5. Menentukan nilai $v_0,v_1,v_2,\ldots,v_{n+1}$.
6. Menentukan $\theta(t)=v_0+v_1+v_2+\cdots+v_{n+1}$.

BAB IV
PEMBAHASAN

Bab ini membahas tentang penyelesaian persamaan *pendulum* dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian dan metode pertubasi homotopi.

4.1 Penyelesaian dengan Metode Dekomposisi Adomian

Pertimbangkan kembali persamaan *pendulum* nonlinear berikut

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega f(\theta) = 0 \tag{4.1}$$

dengan $\omega = g/l$ dan $f(\theta) = \sin\theta$ berdasarkan nilai awal $\theta(0) = c_1$ dan $\theta'(0) = c_2$ sehingga persamaan (4.1) menjadi

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega f(\theta) \tag{4.2}$$

persamaan (4.2) dapat ditulis dalam bentuk operator

$$L\theta(t) = -N\theta \tag{4.3}$$

untuk menyelesaikan $L\theta(t)$ pada persamaan (4.3) maka diterapkan *invers* operator ke dalam persamaan (4.3) sehingga diperoleh

$$L_{tt}^{-1}L\theta(t) = -L_{tt}^{-1}N\theta \tag{4.4}$$

berdasarkan nilai awal $\theta(0) = c_1$ dan $\theta'(0) = c_2$ maka persamaan (4.4) dapat ditulis

$$\theta(t) = \theta(0) + t\theta'(0) - L_{tt}^{-1}N\theta$$

atau

$$\theta(t) = c_1 + tc_2 - L_{tt}^{-1}N\theta \tag{4.5}$$

Penyelesaian pada persamaan (4.5) merupakan komposisi fungsi – fungsi tak diketahui yaitu fungsi $\theta(t)$ yang merupakan deret $\theta_0(t), \theta_1(t), \theta_2(t), \cdots,$ ditulis

$$\theta(t) = \theta_0(t) + \theta_1(t) + \theta_2(t) + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n(t)$$

Selanjutnya komponen nonlinear $N\theta$ diekspansi dengan menggunakan deret polinomial Adomian A_n, ditulis

$$N\theta = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

maka persamaan (4.5) menjadi

$$\theta(t) = c_1 + tc_2 - L_{tt}^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right)$$

atau

$$\theta(t) = c_1 + tc_2 - \left[L_{tt}^{-1} A_0 + L_{tt}^{-1} A_1 + L_{tt}^{-1} A_2 + \cdots\right] \tag{4.6}$$

polinomial Adomian A_n pada persamaan (4.6) diperoleh dari

$$A_0 = \sin\theta_0 \tag{4.7}$$

$$A_1 = \theta_1 \cos\theta_0 \tag{4.8}$$

$$A_2 = -(\theta_1^2 / 2)\sin\theta_0 + \theta_2 \cos\theta_0 \tag{4.9}$$

$$\vdots$$

oleh karena,

$$\theta_0 = c_1$$

maka

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= -L_{tt}^{-1} A_0 \\
&= -L_{tt}^{-1} \omega \sin\theta_0 \\
&= -(\sin\theta_0)\omega t^2 / 2! \\
\theta_2 &= -L_{tt}^{-1} A_1 \\
&= -L_{tt}^{-1} \omega \cos\theta_0 \\
&= (\omega^2 t^4 / 4!)\sin\theta_0 \cos\theta_0 \\
\theta_3 &= -L_{tt}^{-1} A_2 \\
&= -(\omega^3 t^6 / 6!)\sin\theta_0 \cos^2\theta_0 - 3\sin^3\theta_0
\end{aligned}$$

Selanjutnya setelah nilai suku – suku $\theta_0(t), \theta_1(t), \theta_2(t), \ldots$ diketahui, maka penyelesaian diperoleh

$$\theta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n(t)$$

Contoh 4.1

Tentukan penyelesaian dari persamaan diferensial *pendulum* nonlinear berikut

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \qquad (4.10)$$

dengan masalah nilai awalnya $\theta(0) = 1$ dan $\theta^{'}(0) = 0$ dengan $\frac{g}{l} = 10$.

Penyelesaian :

Penyelesaian persamaan diferensial *pendulum* nonlinear pada persamaan (4.10) dilakukan dengan menentukan θ_0, yang ditulis

$$\theta_0(t) = \theta(0) + t\theta^{'}(0) + L_{tt}^{-1}\phi(t)$$

Berdasarkan nilai awal $\theta(0) = 1$ dan $\theta^{'}(0) = 0$, maka

$$\theta_0(t) = 1$$

Untuk memperoleh nilai $\theta_1(t)$, maka terlebih dahulu ditentukan A_0 berdasarkan persamaan (4.7) dan diperoleh

$$A_0 = \sin(\theta_0) = \sin(1) = 0{,}8414709848$$

Oleh karena,

$$\theta_1(t) = -L_{tt}^{-1}(A_0)$$

maka

$$\theta_1(t) = -\int_0^t\int_0^t (\omega \sin\theta_0)\,dt\,dt$$

$$= -4{,}207354924t^2$$

Selanjutnya nilai A_1 diperoleh dengan menggunakan persamaan (4.8), yaitu

$$\begin{aligned} A_1 &= \theta_1 \cos\theta_0 \\ &= -4{,}207354924t^2 \cos(1) \\ &= -2{,}273243567t^2 \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned} \theta_2(t) &= -L_{tt}^{-1}(A_1) \\ &= -\int_0^t \int_0^t (-\omega^2 \theta_1 \cos\theta_0)dtdt \\ &= 1{,}894369639t^4 \end{aligned}$$

Selanjutnya nilai A_2 diperoleh dengan menggunakan persamaan (4.9), yaitu

$$\begin{aligned} A_2 &= -(\theta_1^2/2)\sin(1) + \theta_2 \cos(1) \\ &= -6{,}424258176t^4 \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned} \theta_3(t) &= -L_{tt}^{-1}(A_2) \\ &= -\int_0^t \int_0^t (-\omega^3 \sin\theta_0 \cos^2\theta_0 - 3\sin^3\theta_0)dtdt \\ &= 2{,}141419392t^6 \end{aligned}$$

Selanjutnya nilai A_3 diperoleh dengan menggunakan persamaan (4.9), yaitu

$$\begin{aligned} A_3 &= -(\theta_1^3/6)\cos(1) - \theta_1\theta_2 \sin(1) + \theta_3 \cos(1) \\ &= 12{,}25651402t^6 \end{aligned}$$

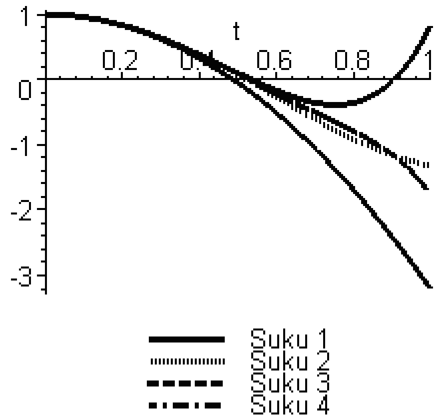
maka

$$\begin{aligned} \theta_4(t) &= -L_{tt}^{-1}(A_3) \\ &= -\int_0^t \int_0^t \omega^4(-33\sin^3\theta_0 \cos\theta_0 + \sin\theta_0 \cos^3\theta_0)dtdt \\ &= -2{,}601882448t^8 \end{aligned}$$

Penyelesaian persamaan (4.10) dapat diperoleh dengan cara menjumlahkan suku – suku $\theta_0(t), \theta_1(t), \theta_2(t), \theta_3(t), \ldots$ atau ditulis

$$\theta(t) = \theta_0(t) + \theta_1(t) + \theta_2(t) + \theta_3(t) + \theta_4(t) + \cdots$$
$$= 1 - 4{,}207354924t^2 + 1{,}894369639t^4 + 2{,}141419392t^6 - 2{,}601882448t^8 + \cdots \quad \blacksquare$$

Gambar 4.1 di bawah ini menunjukkan bahwa akurasi penyelesaian $\theta(t)$ yang diperoleh dengan menggunakan metode dekomoposisi Adomian untuk empat suku terhadap penyelesaian eksak persamaan diferensial *pendulum* nonlinear.



Gambar 4.1 Penyelesaian persamaan (4.10) berdasarkan nilai awal $\theta(0) = 1$ dan $\theta^{'}(0) = 0$ dengan $\frac{g}{l} = 10$.

Gambar 4.4 diatas untuk persamaan *pendulum* nonlinear, sedangkan untuk membandingkan dengan *pendulum* linear menggunakan metode pertubasi homotopi dapat dilihat pada contoh 4.2 berikut.

Contoh 4.2

Tentukan penyelesaian dari persamaan diferensial *pendulum* linear berikut

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{4.11}$$

dengan masalah nilai awal $\theta(0)=1$ dan $\theta^{'}(0)=3$, dengan $\frac{g}{l}=-4$.

Solusi eksak adalah $\theta(t)=\frac{5}{4}e^{2t}-\frac{1}{4}e^{-2t}$

Penyelesaian :

Penyelesaian persamaan diferensial *pendulum* linear pada persamaan (4.11) dilakukan dengan menentukan θ_0 , yang ditulis

$$\theta_0(t)=\theta(0)+t\theta^{'}(0)+L_{tt}^{-1}\phi(t)$$

Berdasarkan nilai awal $\theta(0)=1$ dan $\theta^{'}(0)=3$, maka

$$\theta_0(t)=1+3t$$

maka

$$\theta_1(t)=4\int_0^t\int_0^t(1+3t)dtdt$$

$$=2t^2+2t^3$$

dan

$$\theta_2(t)=4\int_0^t\int_0^t(2t^2+2t^3)dtdt$$

$$=\frac{2}{3}t^4+\frac{2}{5}t^5$$

maka

$$\theta_3(t)=4\int_0^t\int_0^t(\frac{2}{3}t^4+\frac{2}{5}t^5)dtdt$$

$$=\frac{4}{45}t^6+\frac{4}{105}t^7$$

dan

$$\theta_4(t)=4\int_0^t\int_0^t(\frac{4}{45}t^6+\frac{4}{105}t^7)dtdt$$

$$=\frac{2}{315}t^8+\frac{2}{945}t^9$$

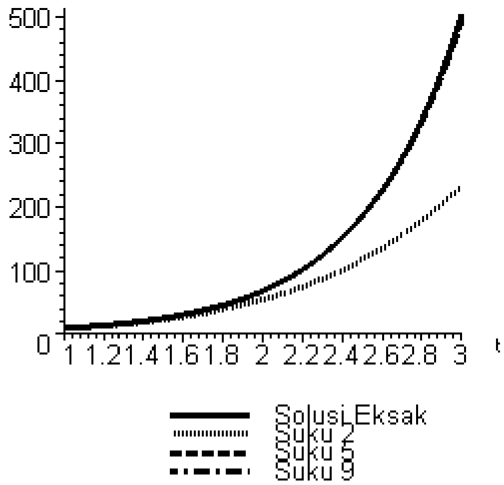
Penyelesaian persamaan (4.11) dapat diperoleh dengan cara menjumlahkan suku – suku $\theta_0(t), \theta_1(t), \theta_2(t), \theta_3(t), \ldots$ atau ditulis

$$\theta(t) = \theta_0(t) + \theta_1(t) + \theta_2(t) + \theta_3(t) + \theta_4 + \cdots$$

$$= 1 + 3t + 2t^2 + 2t^3 + \frac{2}{3}t^4 + \frac{2}{5}t^5 + \frac{4}{45}t^6 + \frac{4}{105}t^7 + \frac{2}{315}t^8 + \frac{2}{945}t^9 + \cdots \blacksquare$$

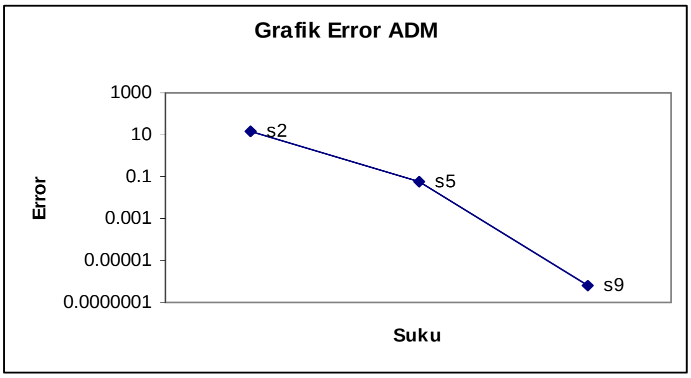
Akurasi penyelesaian $\theta(t)$ bergantung kepada banyaknya suku – suku yang dijumlahkan.

Gambar 4.2 di bawah ini menunjukkan bahwa akurasi penyelesaian $\theta(t)$ yang diperoleh dengan menggunakan metode dekomoposisi Adomian untuk beberapa suku terhadap penyelesaian eksak persamaan diferensial *pendulum* linear.



Gambar 4.2 Penyelesaian persamaan (4.11) berdasarkan nilai awal $\theta(0) = 1$ dan $\theta^{'}(0) = 3$ dengan $\frac{g}{l} = -4$.

Berdasarkan gambar 4.2 dapat dilihat bahwa, kurva yang dibentuk oleh $\theta_9(t)$ lebih mendekati dibandingkan kurva – kurva lainnya. Hal ini menunjukkan suku lebih banyak akan mendekati kurva penyelesaian eksaknya. Sedangkan untuk memperkecil *error* yang dihasilkan oleh beberapa kurva terhadap solusi eksak, dilihat pada gambar 4.3



Gambar 4.3 Kecepatan metode dekomposisi Adomian menghampiri persamaan (4.11) berdasarkan nilai awal $\theta(0) = 1$ dan $\theta'(0) = 3$ dengan $\frac{g}{l} = -4$ untuk sembilan suku.

4.2 Penyelesaian dengan Metode Pertubasi Homotopi

Pertimbangkan kembali persamaan *pendulum* nonlinear berikut :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega f(\theta) = 0 \tag{4.12}$$

dengan $\omega = g/l$ dan $f(\theta) = \sin\theta$ nilai awal $\theta(0) = c_1$ dan $\theta'(0) = c_2$, sehingga persamaan (4.12) menjadi

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta \tag{4.13}$$

persamaan (4.13) dapat ditulis dalam bentuk homotopi dengan $\sin\theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!}$ berikut

$$L(v) - L(\theta_0) + p[L(\theta_0) - \omega\left(v - \frac{v^3}{3!}\right)] = 0 \tag{4.14}$$

Subtitusi persamaan (2.14) ke persamaan (4.14) sehingga penyelesaian dari persamaan (4.14) disusun berdasarkan orde pertubasi p berikut

$$L(v_0 + v_1 p + v_2 p^2 + \cdots) - L(\theta_0) + p[\omega(v_0 + v_1 p + v_2 p^2 + \cdots) -$$

$$\omega\frac{(v_0 + v_1 p + v_2 p^2 + \cdots)^3}{3!}] = 0 \tag{4.15}$$

untuk orde nol, $p = p^2 = p^3 \cdots = 0$

$$L(v_0) - L(\theta_0) = 0$$

$$v_0 = \theta_0 \tag{4.16}$$

untuk orde satu, $p \neq 0$, $p^2 = p^3 \cdots = 0$

$$L(v_1) + \omega\left(v_0 - \frac{v_0^3}{3!}\right) = 0$$

$$v_1 = L_{tt}^{-1}\omega\left(-v_0 + \frac{v_0^3}{3!}\right) \tag{4.17}$$

untuk orde dua, $p^2 \neq 0$, $p = p^3 = p^4 \ldots = 0$

$$L(v_2) + \omega\left(v_1 - \frac{1}{2}v_0^2 v_1\right) = 0$$

$$v_2 = L_{tt}^{-1}\omega\left(-v_1 + \frac{1}{2}v_0^2 v_1\right) \tag{4.18}$$

untuk orde tiga, $p^3 \neq 0$, $p = p^2 = p^4 = p^5 \cdots = 0$

$$L(v_3) + \omega\left(v_2 - \frac{1}{2}{v_0}^2 v_2 - \frac{1}{2}v_0 v_1^2\right) = 0$$

$$v_3 = L_{tt}^{-1}\omega\left(-v_2 + \frac{1}{2}{v_0}^2 v_2 + \frac{1}{2}v_0 v_1^2\right) \tag{4.19}$$

untuk orde empat, $p^4 \neq 0$, $p = p^2 = p^3 = p^5 = p^6 \cdots = 0$

$$L(v_4) + \omega\left(v_3 - v_0 v_1 v_2 - \frac{1}{6}v_1^3\right) = 0$$

$$v_4 = L_{tt}^{-1}\omega\left(-v_3 + v_0 v_1 v_2 + \frac{1}{6}v_1^3\right) \tag{4.20}$$

Selanjutnya setelah nilai suku-suku $v_0(t), v_1(t), v_2(t), \ldots, v_{n+1}$ diketahui, maka penyelesaian dapat diperoleh dengan menggunakan hampiran

$$\theta(t) = \lim_{p \to 1} v$$

dengan

$$v = \sum_{k=0}^{n-1} v_k(t)$$

Contoh 4.1

Tentukan penyelesaian dari persamaan diferensial *pendulum* nonlinear berikut

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \tag{4.21}$$

dengan masalah nilai awalnya $\theta(0) = 1$ dan $\theta^{'}(0) = 0$ dengan $\frac{g}{l} = 10$.

Penyelesaian :

Penyelesaian persamaan diferensial *pendulum* nonlinear pada persamaan (4.21) dilakukan dengan menentukan v_0, yang diperoleh dari persamaan (4.16)

$$v_0 = \theta_0 = 1$$

untuk orde 1, $p \neq 0$, $p^2 = p^3 = \cdots = 0$, sehingga persamaan (4.17)

$$\begin{aligned} v_1 &= L_{tt}^{-1} 10\left(-v_0 + \frac{v_0^3}{3!}\right) \\ &= \frac{-25}{6} t^2 \end{aligned}$$

untuk orde 2, $p^2 \neq 0$, $p = p^3 = \cdots = 0$, sehingga persamaan (4.18)

$$\begin{aligned} v_2 &= L_{tt}^{-1} 10\left(-v_1 + \frac{1}{2} v_0^2 v_1\right) \\ &= \frac{125}{72} t^4 \end{aligned}$$

untuk orde 3, $p^3 \neq 0$, $p = p^2 = p^4 = \cdots = 0$, sehingga persamaan (4.19)

$$\begin{aligned} v_3 &= L_{tt}^{-1} 10\left(-v_2 + \frac{1}{2} {v_0}^2 v_2 + \frac{1}{2} v_0 v_1^2\right) \\ &= \frac{125}{48} t^6 \end{aligned}$$

untuk orde 4, $p^4 \neq 0$, $p = p^2 = p^3 = p^5 = \cdots = 0$ sehingga persamaan (4.20)

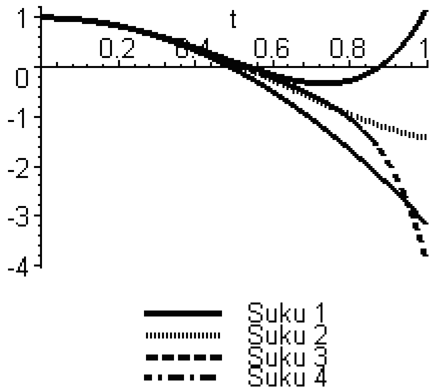
$$\begin{aligned} v_4 &= L_{tt}^{-1} 10\left(-v_3 + v_0 v_1 v_2 + \frac{1}{6} v_1^3\right) \\ &= -\frac{141875}{36288} t^8 \end{aligned}$$

Penyelesaian persamaan (4.21) dapat diperoleh dengan cara menjumlahkan suku – suku $v_0(t), v_1(t), v_2(t), \ldots, v_{n+1}$ atau ditulis

$$\theta(t) = v_0(t) + v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) + v_4(t) + \cdots$$

$$= 1 - \frac{25}{6}t^2 + \frac{125}{72}t^4 + \frac{125}{48}t^6 - \frac{141875}{36288}t^8 + \cdots \qquad \blacksquare$$

Gambar 4.4 di bawah ini menunjukkan bahwa akurasi penyelesaian $\theta(t)$ yang diperoleh dengan menggunakan metode pertubasi homotopi untuk empat suku terhadap penyelesaian eksak persamaan diferensial *pendulum* nonlinear.



Gambar 4.4 Penyelesaian persamaan (4.21) berdasarkan nilai awal $\theta(0) = 1$ dan $\theta'(0) = 0$ dengan $\frac{g}{l} = 10$.

Gambar 4.4 diatas untuk persamaan *pendulum* nonlinear, sedangkan untuk membandingkan dengan *pendulum* linear menggunakan metode pertubasi homotopi dapat dilihat pada contoh 4.2 berikut.

Contoh 4.2

Tentukan penyelesaian dari persamaan diferensial *pendulum* linear berikut

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \qquad (4.22)$$

dengan masalah nilai awal $\theta(0) = 1$ dan $\theta'(0) = 3$, dengan $\frac{g}{l} = -4$.

Solusi eksak adalah $\frac{5}{4}e^{2t} - \frac{1}{4}e^{-2t}$

Penyelesaian :

Jika menggunakan metode pertubasi homotopi maka harus menentukan nilai $v_0(t), v_1(t), v_2(t), v_3(t), \ldots$ yaitu

$$L(v) - L(\theta_0) + p\left(\frac{g}{l}(v)\right) = 0$$

$$L(v_0 + v_1 p + v_2 p^2 + \cdots) - L(\theta_0) + p\left(\frac{g}{l}(v_0 + v_1 p + v_2 p^2 + \cdots)\right) = 0 \quad (4.23)$$

untuk orde 0, $p = p^1 = p^2 \cdots = 0$, sehingga persamaan (4.23)

$$L(v_0) - L(\theta_0) = 0$$

$$v_0 = \theta_0 = 1 + 3t$$

untuk orde 1, $p \neq 0$, $p^2 = p^3 = \cdots = 0$, sehingga persamaan (4.23)

$$L(v_1) + \left(\frac{g}{l}(v_0)\right) = 0$$

$$v_1 = 4\int_0^t \int_0^t (1 + 3t)dtdt$$

$$v_1 = 2t^2 + 2t^3$$

untuk orde 2, $p^2 \neq 0$, $p = p^3 = \cdots = 0$, sehingga persamaan (4.23)

$$L((v_2) + \left(\frac{g}{l}(v_1)\right) = 0$$

$$v_2 = 4\int_0^t \int_0^t (2t^2 + 2t^3)dtdt$$

$$v_2 = \frac{2}{3}t^4 + \frac{2}{5}t^5$$

untuk orde 3, $p^3 \neq 0$, $p = p^2 = p^4 = \cdots = 0$, sehingga persamaan (4.23)

$$L(v_3) + \left(\frac{g}{l}(v_2)\right) = 0$$

$$v_3 = 4\int_0^t\int_0^t (\frac{2}{3}t^4 + \frac{2}{5}t^5)dtdt$$

$$v_3 = \frac{4}{45}t^6 + \frac{4}{105}t^7$$

untuk orde 4, $p^4 \neq 0$, $p = p^2 = p^3 = \cdots = 0$, sehingga persamaan (4.23)

$$L(v_4) + \left(\frac{g}{l}(v_3)\right) = 0$$

$$v_4 = 4\int_0^t\int_0^t (\frac{4}{45}t^6 + \frac{4}{105}t^7)dtdt$$

$$v_4 = \frac{2}{315}t^8 + \frac{2}{945}t^9$$

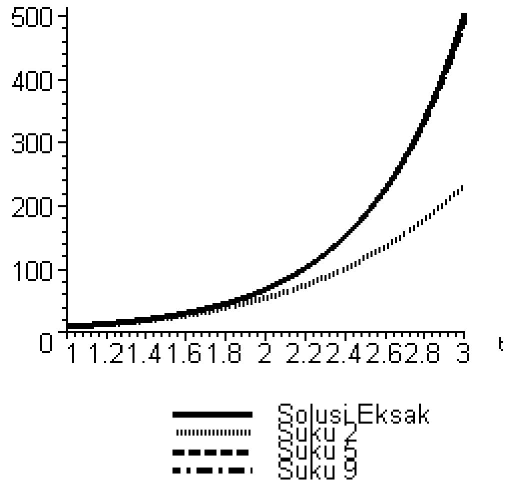
Penyelesaian persamaan (4.22) dapat diperoleh dengan cara menjumlahkan suku – suku $v_0(t), v_1(t), v_2(t), \ldots, v_{n+1}$ atau ditulis

$$\theta(t) = v_0(t) + v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) + v_4(t)\cdots$$

$$= 1 + 3t + 2t^2 + 2t^3 + \frac{2}{3}t^4 + \frac{2}{5}t^5 + \frac{4}{45}t^6 + \frac{4}{105}t^7 + \frac{2}{315}t^8 + \frac{2}{945}t^9 + \cdots \blacksquare$$

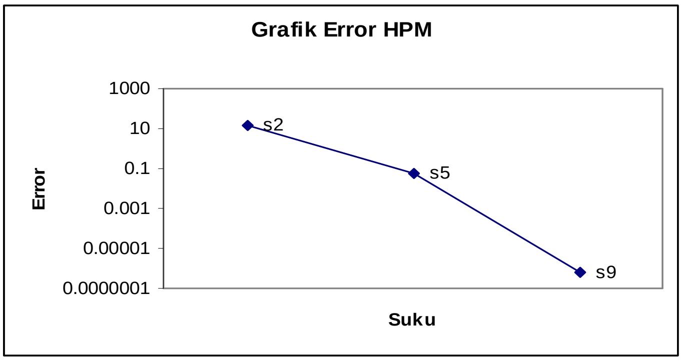
Akurasi penyelesaian $\theta(t)$ bergantung kepada banyaknya suku – suku yang dijumlahkan.

Gambar 4.5 di bawah ini menunjukkan bahwa akurasi penyelesaian $\theta(t)$ yang diperoleh dengan menggunakan metode pertubasi homotopi untuk beberapa suku terhadap penyelesaian eksak persamaan diferensial *pendulum* linear.



Gambar 4.5 Penyelesaian persamaan (4.22) berdasarkan nilai awal $\theta(0)=1$ dan $\theta^{'}(0)=3$ dengan $\frac{g}{l}=-4$.

Berdasarkan gambar 4.5 dapat dilihat bahwa kurva yang dibentuk oleh $\theta_9(t)$ lebih mendekati dibandingkan kurva – kurva lainnya. Hal ini menunjukkan suku lebih banyak akan mendekati kurva penyelesaian eksaknya. Sedangkan untuk memperlihatkan *error* yang dihasilkan oleh beberapa kurva terhadap solusi eksak, dilihat pada gambar 4.6



Gambar 4.6 Kecepatan metode pertubasi homotopi menghampiri persamaan (4.22) berdasarkan nilai awal $\theta(0)=1$ dan $\theta^{'}(0)=3$ dengan $\frac{g}{l}=-4$ untuk sembilan suku.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dari skripsi ini diperoleh kesimpulan sebagai berikut

a) Metode dekomposisi Adomian menyelesaikan persamaan diferensial *pendulum* nonlinear $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$, berdasarkan masalah nilai awal $\theta(0)=c_1$ dan $\theta'(0)=c_2$ menghasilkan

$$\theta(t)=c_1+tc_2+\frac{g}{2l}t^2\sin\theta_0+\frac{g}{4!l}t^4\sin\theta_0\cos\theta_0+\cdots$$

b) Metode pertubasi homotopi menyelesaikan persamaan diferensial *pendulum* nonlinear $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$, berdasarkan masalah nilai awal $\theta(0)=c_1$ dan $\theta'(0)=c_2$ menghasilkan

$$\theta(t)=\theta(0)+\frac{g}{l}\left(\theta_0-\frac{\theta_0^3}{3!}\right)+\frac{g}{l}\left(\theta_1-\frac{3\theta_0^2\theta_1}{3!}\right)+\cdots$$

5.2 Saran

Skripisi ini membahas tentang penyelesaian persamaan diferensial *pendulum* nonlinear $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$, berdasarkan masalah nilai awal $\theta(0)=c_1$ dan $\theta'(0)=c_2$ dengan komponen nonlinearnya $N\theta=\sin\theta$ menggunakan metode dekomposisi Adomian dan metode homotopi pertubasi. Bagi pembaca yang berminat melanjutkan skripsi ini, penulis sarankan membahas tentang persamaan diferensial *pendulum* nonlinear dengan menggunakan metode – metode lain, atau membahas tentang persamaan diferensial yang lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Adomian, G., *Nonlinear Stochastic System Theory and Applications to Physics*, Kluwer Academic. Dordrecht. London, 1989.

Adomian, G., *Solving frontier problems of physics : The Decomposition Method*, Kluwer Academic. Dordrecht. London, 1994.

Belendez.A, C.Pascual, D.I.Mendez, T.Belendez, C.Neipp, Exact Solution for the Nonlinear Pendulum, *Departamento de Fisica, Ingenierta de Sistemas y Teoria de ta Senal, Universidas de Alicante,* Spain, 2007.

Borrelli, Robert L., Coleman, Courtney S., *Differential Equations A Modeling Perspective*, Harvey Mudd College, Canada, 1998.

MD. Sazzad Hossien Chowdhury, *Solving Linear And Nonlinier Differential Equations by Homotopy Perturbation Method*, Faculty Of Sciene And Technology University Kebangsaan Malaysia Bangi, Thesis : 2007.

Sieradski, Allan J., *An Introduction to Topology and Homotopy*, University of Oregon, PWS-Kent Publishing Company, Boston, 1992.